函数 极限 连续

极限

$$\text{极限存在的充要条件是在}x_0\text{处的左极限和右极限均存在并且相等} \tag{1}$$

⚠️

求极限时注意分母和分子有时不能直接使用基础极限公式，直接使用可能会导致精度丢失问题，应该使用泰勒公式。

⭐求极限时为 **非零常数因子** 可以先求出来。

三角函数和化积与差化积

$$
\begin{aligned}
&\text{三角函数差化积、和化积：} && (2)\\
&cos(A-B)=cosAcosB+sinAsinB && (3)\\
&cos(A+B)=cosAcosB-sinAsinB && (4)\\
&\text{通过代数变换我们可得：} && (5)\\
&cos(A-B)+cos(A+B)=2cosAcosB && (6)\\
&cos(A-B)-cos(A+B)=2sinAsinB && (7)\\
&\text{此时令}A=\frac{a+b}{2},b=\frac{a-b}{2}\text{可得：} && (8)\\
&cosb+cosa=2cos(\frac{a+b}{2})cos(\frac{a-b}{2}) && (9)\\
&cosb-cosa=2sin(\frac{a+b}{2})sin(\frac{a-b}{2}) && (10)\\
& && (11)\\
& && (12)\\
&\text{同理}sin\text{与}tan\text{也可以变换.} && (13)
\end{aligned}
$$

极限存在准则

夹逼准则

$$
\begin{aligned}
&\text{若存在}N\text{时},\text{当}n>N\text{时},x_n<=y_n<=z_n,\text{且}\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}z_n=a,\text{那么}\lim_{x\to\infty}y_n=a && (14)\\
& && (15)\\
&\text{夹逼准则多用在给你}x_n(\text{或}z_n)\text{的极限},\text{让你去求}y_n\text{的极限},\text{此时}y_n\text{的极限不好求}, && (16)\\
&\text{我们需要去寻找}z_n(\text{或}x_n)\text{的极限},\text{利用夹逼准则可以直接求出}y_n\text{的极限} && (17)
\end{aligned}
$$

单调有界准则

单调有界数列必有极限，单调递增有上界数列和单调递减有下界数列必有极限。

证明数列有界方法：（1）基本不等式。（2）归纳法。（3）放缩法。

证明数列单调方法：（1）作差，大于0递增，小于0递减。（2）作商，大于1递增，小于1递减。

"1^(∞)"型极限常用结论

$$
\begin{aligned}
&若lim\alpha(x)=0, lim\beta(x)=\infty, 且lim\alpha(x)\beta(x)=A, && (18)\\
&那么lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}=e^A && (19)
\end{aligned}
$$

泰勒公式✨

$$
\begin{aligned}
&(1)e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) && (20)\\
&(2)\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2x-1)!}+o(x^{2x-1}) && (21)\\
&(3)\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+o(x^{2n}) && (22)\\
&(4)ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n) && (23)\\
&(5)(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n) && (24)\\
&(6)tanx=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots && (25)\\
&(7)arctanx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots && (26)
\end{aligned}
$$

$$max\{a_i\}=a, \lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a \tag{27}$$

连续

$$函数在x_0处连续的充要条件是在x_0处即左连续又右连续(即左右极限相等且等于f(x_0)) \tag{28}$$

零点定理

$$如果f(x)在[a,b]上连续, 且f(a)*f(b)<0, 那么至少存在一点\xi\in(a,b)使得f(\xi)=0 \tag{29}$$

导数

导数存在条件

导数存在的充要条件是左右导数都存在且相等

导数公式✨

$$(C)' = 0 \qquad (x^a)' = ax^{a-1} \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

$$(a^x)' = a^x lna \qquad (e^x)' = e^x \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

$$(log_a x)' = \frac{1}{xlna} \qquad (ln|x|)' = \frac{1}{x} \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

$$(sinx)' = cosx \qquad (cosx)' = -sinx \tag{36}$$

$$\tag{37}$$

$$(tanx)' = secx^2 \qquad (cotx)' = -cscx^2 \tag{38}$$

$$\tag{39}$$

$$(secx)' = secx\ tanx \qquad (cscx)' = -cscx\ cotx \tag{40}$$

$$\tag{41}$$

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{42}$$

$$\tag{43}$$

$$(arctanx)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (arccotx)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{44}$$

链式法则

$$\begin{gathered}
\text{已知}F(x)\text{的导数为}f(x),\text{那么}F(u)\text{的导数为?} \\
\text{令}y = F(u), u = g(x),\text{那么}\frac{d_y}{d_x} = \frac{d_y}{d_u} * \frac{d_u}{d_x} \\
\text{即}F(u) * \frac{d_u}{d_x}
\end{gathered} \tag{45}$$

$$\text{例：求}F'(\frac{1}{x}) \qquad \text{即：}f(\frac{1}{x}) * (-\frac{1}{x^2})$$

高阶导数

$$(sinx)^{(n)} = sin(x + n * \frac{\pi}{2}) \tag{46}$$

$$(cosx)^{(n)} = cos(x + n * \frac{\pi}{2}) \tag{47}$$

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)} \tag{48}$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \tag{49}$$

微分运算法则

$$d(c) = 0 \tag{50}$$
$$\tag{51}$$
$$d(x^n) = nx^{n-1}d_x \tag{52}$$
$$\tag{53}$$
$$d(x+y) = d_x + d_y \tag{54}$$
$$\tag{55}$$
$$d(x-y) = d_x - d_y \tag{56}$$
$$\tag{57}$$
$$d(xy) = xd_y + yd_x \tag{58}$$
$$\tag{59}$$
$$d(\frac{x}{y}) = \frac{yd_x - xd_y}{y^2} \tag{60}$$
$$\tag{61}$$
$$d(f(x)) = f'(x)d_x \tag{62}$$

微分中值定理

罗尔定理

$$\text{如果}f(x)\text{满足以下条件：} \tag{63}$$
$$\tag{64}$$
$$(1)\text{在闭区间}[a,b]\text{上连续} \tag{65}$$
$$(2)\text{在开区间}(a,b)\text{可导} \tag{66}$$
$$(3)f(a) = f(b) \tag{67}$$
$$\tag{68}$$
$$\text{那么在}(a,b)\text{内至少存在一点}\xi,\text{使得}f(\xi)' = 0 \tag{69}$$
$$\tag{70}$$
$$\text{推论：若在区间}I\text{上}f^{(n)}(x) \neq 0,\text{则方程}f(x) = 0\text{在}I\text{上最多有}n\text{个实根}. \tag{71}$$

拉格朗日中值定理

$$\text{如果}f(x)\text{满足以下条件：} \tag{72}$$
$$\tag{73}$$
$$(1)\text{在闭区间}[a,b]\text{上连续} \tag{74}$$
$$(2)\text{在开区间}(a,b)\text{可导} \tag{75}$$
$$\tag{76}$$
$$\text{那么在}(a,b)\text{内至少存在一点}\xi,\text{使得}f(b) - f(a) = f(\xi)'(b-a) \tag{77}$$

柯西中值定理

$$\begin{aligned}
&\text{如果}f(x),F(x)\text{满足以下条件：} && (78)\\
& && (79)\\
&(1)\text{在闭区间}[a,b]\text{上连续} && (80)\\
&(2)\text{在开区间}(a,b)\text{可导,且}F(x)'\text{在}(a,b)\text{内每一点处均不为零} && (81)\\
& && (82)\\
&\text{那么在}(a,b)\text{内至少存在一点}\xi,\text{使得}\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f(\xi)'}{F(\xi)'} && (83)
\end{aligned}$$

拐点

$$\begin{gathered}
f(x)\text{二阶可导,如果}(x_0,f(x_0))\text{为曲线}f(x)\text{的拐点,那么}f''(x_0)=0\\
\text{如果}f''(x_0)=0,\text{且}f''(x)\text{在}x_0\text{两侧异号（或}f'''(x0)\neq 0\text{）,则点}(x_0,f(x_0))\text{为函数}f(x)\text{的拐点}
\end{gathered}\tag{84}$$

渐近线

$$\begin{aligned}
&(1)\text{水平渐近线} && (85)\\
& && (86)\\
&\text{若}\lim_{x\to\infty}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A),\text{那么}y=A\text{是曲线}y=f(x)\text{的水平渐近线} && (87)\\
& && (88)\\
&(2)\text{铅直渐近线} && (89)\\
& && (90)\\
&\text{若}\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty(\text{或}\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty,\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty),\text{那么}x=x_0\text{是曲线}y=f(x)\text{的铅直渐近线} && (91)\\
& && (92)\\
&(3)\text{斜渐近线} && (93)\\
& && (94)\\
&\text{若}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\text{且}\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b,(\text{或}x\to-\infty,\text{或}x\to+\infty),\text{那么}y=ax+b\text{是曲线}y=f(x)\text{的斜渐近线} && (95)
\end{aligned}$$

曲率与弧微分

$$\begin{aligned}
&y=f(x,y)\text{的弧微分}ds=\sqrt{1+y'^2}dx && (96)\\
&\text{曲率}K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \rho=\frac{1}{K}\text{为曲率半径} && (97)
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
\text{曲线}y=f(x,y)\text{在点}M(x,y)\text{处的曲率为}K(K\neq 0).\text{在点}M\text{处的法线上,在曲线凹的一侧取点}D\\
\text{使得}|DM|=\frac{1}{K}=\rho,\text{以}D\text{为圆心,}\rho\text{为半径的圆称为曲线在点}M\text{处的}\textcolor{red}{\text{曲率圆}},\text{圆心}D\text{称为在点}M\text{的}\textcolor{red}{\text{曲率中心}}
\end{gathered}\tag{98}$$

不定积分

积分公式✨

$$\int 0dx = C \qquad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1) \tag{99}$$

(100)

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x|+C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{lna}+C \quad (a>0, a\neq 1) \tag{101}$$

(102)

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int sinx\ dx = -cosx + C \tag{103}$$

(104)

$$\int cosx\ dx = sinx + C \qquad \int secx^2\ dx = tanx + C \tag{105}$$

(106)

$$\int cscx^2\ dx = -cotx + C \qquad \int secxtanx\ dx = secx + C \tag{107}$$

(108)

$$\int cscxcotx\ dx = -cscx + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsinx + C \tag{109}$$

(110)

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctanx + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C \tag{111}$$

(112)

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctan\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}| + C \tag{113}$$

(114)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C \tag{115}$$

(116)

$$\int secx\ dx = ln|secx+tanx| + C \qquad \int cscx\ dx = -ln|cscx+cotx| + C \tag{117}$$

常用变量代换

$$(1)\text{看到}\sqrt{a^2-x^2},\text{令}x = asint \quad (\text{或}acost) \tag{118}$$

(119)

$$(2)\text{看到}\sqrt{a^2+x^2},\text{令}x = atant \tag{120}$$

(121)

$$(3)\text{看到}\sqrt{x^2-a^2},\text{令}x = asect \tag{122}$$

分部积分公式

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{123}$$

$$\text{例如：}\int xe^x dx = \int xd(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \tag{124}$$

定积分

积分中值定理

$$若f(x)在[a,b]上连续,则存在点\xi使得\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\quad(a<\xi<b) \tag{125}$$

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx^n dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & ,n为正偶数\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} & ,n为大于一的奇数\end{cases} \tag{126}$$

$$(2)\int_0^{\pi} xf(sinx)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)dx.其中f(x)连续 \tag{127}$$

反常积分

$$f(x)为[a,+\infty)上的连续函数,如果极限\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx存在,则反常积分\int_a^{+\infty} f(x)dx收敛,如果不存在就是发散 \tag{128}$$

$$\tag{129}$$

$$常用结论:\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}p>1, & 收敛,\\ p\leqslant 1, & 发散,\end{cases}\quad(a>0) \tag{130}$$

$$f(x)在点a任一领域内都无界,那么点a成为f(x)的瑕点。函数f(x)在(a,b\,]上连续,点a为函数f(x)的瑕点, \tag{131}$$

$$如果极限\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx存在,则此极限为函数f(x)在[a,b]上的反常积分,记为\int_a^b f(x)dx收敛,如果不存在就是发散 \tag{132}$$

$$\tag{133}$$

$$常用结论:\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx=\begin{cases}p<1, & 收敛,\\ p\geqslant 1, & 发散.\end{cases} \tag{134}$$

$$\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx=\begin{cases}p<1, & 收敛,\\ p\geqslant 1, & 发散.\end{cases} \tag{135}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(1-x)^\beta}dx \quad \alpha<1,\beta<1 \quad 收敛$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha(1-x)^\beta}dx \quad \alpha<1,\beta<2 \quad 收敛$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^\alpha(1-x)^\beta}dx \quad \alpha<2,\beta<1 \quad 收敛$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \quad p>1 \quad 收敛$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}dx \quad p>1 \quad 收敛$$

$p<1$

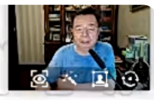
$1-p<2$

$\beta-1<1$

$\beta<2$

$\varepsilon>0$

$\frac{\ln x}{x^p}=\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}\cdot\frac{\ln x}{x^\varepsilon}\to 0$



25武忠祥

【22年2】设 p 为常数，若反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$ 收敛，则 p 的取值范围是（ ）

(A) $(-1,1)$ (B) $(-1,2)$ (C) $(-\infty,1)$ (D) $(-\infty,2)$

后续关注微信公众号:有洞学社
每日课程更新加群:262044674

高斯积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{136}$$

定积分应用

计算几何公式

$$\text{若平面区域}D\text{由曲线}r=r(\theta),\theta=\alpha,\theta=\beta\quad(\alpha<\beta)\text{围城},\text{其面积为}S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r(\theta)^2d_{\theta} \tag{137}$$

(138)

$$\text{若区域}D\text{由曲线}y=f(x)(\ f(x)\geqslant 0\ )\text{和}x=a,x=b(0\leqslant a<b)\text{及}x\text{轴围成则：} \tag{139}$$

$$(1)\text{区域}D\text{绕}x\text{轴旋转一周所得到旋转体的体积为}V_x=\pi\int_a^b f(x)^2dx \tag{140}$$

$$(1)\text{区域}D\text{绕}y\text{轴旋转一周所得到旋转体的体积为}V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx \tag{141}$$

(142)

$$\text{曲线弧长：} \tag{143}$$

$$(1)C:y=y(x),a\leqslant x\leqslant b.\quad \text{则}s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx \tag{144}$$

$$(2)C:\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\end{cases}\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.\quad\text{则}s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2}dt \tag{145}$$

$$(3)C:r=r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta.\quad\text{则}s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta \tag{146}$$

(147)

$$\text{旋转体侧面积：} \tag{148}$$

$$\text{曲线}y=f(x)(\ f(x)\geqslant 0\ )\text{和直线}x=a,x=b\ (0\leqslant a<b)\text{及}x\text{轴所围成区域绕}x\text{轴旋转所得旋转体的侧面积为} \tag{149}$$

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx \tag{150}$$

微分方程

齐次微分方程

$$\text{令}u=\frac{y}{x},\text{则}y'=u+xu' \tag{151}$$

一阶线性微分方程

$$\begin{gathered}\text{形如}y'+p(x)y=q(x)\text{的方程}\\ \text{通常直接利用公式}y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C],\text{其中}x\text{与}y\text{可以互换}\end{gathered} \tag{152}$$

高阶微分方程

$$\text{形如}y''=(x,y')\text{型的微分方程},\text{令}p=y',p'=y'' \tag{153}$$

(154)

$$\text{形如}y''=(y,y')\text{型的微分方程},\text{令}y'=p,y''=p\frac{dp}{dy} \tag{155}$$

高阶线性微分方程

$$\text{齐次微分方程} \qquad y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{156}$$
$$\text{非齐次微分方程} \qquad y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{157}$$

如果$y_1(x)$和$y_2(x)$是齐次方程两个线性无关的特解，那么$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是齐次方程齐次方程的通解 (158)

(159)

如果y^*是非齐次方程的一个特解，$y_1(x)$和$y_2(x)$是齐次方程两个线性无关的特解， (160)

则$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*$是非齐次方程的通解 (161)

二阶常系数线性齐次微分方程形式为：$y''+py'+qy=0$，特征方程为$r^2+pr+q=0$的两个根为r_1,r_2 (162)

(163)

(1)若$r_1\neq r_2$，通解为$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ (164)

(165)

若有k个不等根，通解 $=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\cdots+C_ke^{r_kx}$ (166)

(167)

(2)若$r_1=r_2$，通解为$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$ (168)

(169)

若有k个重根，通解 $=(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{x-1})e^{rx}$ (170)

(171)

(3)若$r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta$，通解为$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ (172)

(173)

(174)

(175)

二阶常系数线性非齐次微分方程形式为：$y''+py'+qy=f(x)$ (176)

(177)

(1)若$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$，其中$P_m(x)$为x的m次多项式，则方程特解可以设置为 (178)

$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$其中$Q_m(x)$是与$P_m(x)$同次的多项式，$k$是特征方程含根$\lambda$的重复次数 (179)

(180)

(2)若$f(x)=e^{\alpha x}[P_l^{(1)}(x)cos\beta x+P_n^{(2)}(x)sin\beta x]$，其中$P_l^{(1)}(x)$和$P_n^{(2)}(x)$分别为$x$的$l$次，$n$次多项式 (181)

则方程特解可以可以设置为$y^*=x^ke^{\alpha x}[R_m^{(1)}(x)cos\beta x+R_m^{(2)}(x)sin\beta x]$ (182)

其中$R_m^{(1)}(x)$和$R_m^{(2)}(x)$是两个m次多项式$m=max(l,n)$. (183)

当$\alpha+i\beta$不是方程$y''+py'+qy=0$特征根时，$k=0$. (184)

当$\alpha+i\beta$是方程$y''+py'+qy=0$特征根时，$k=1$. (185)

多元函数微分学

全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{186}$$

全微分存在的充要条件： (187)

如果函数$z=f(x,y)$的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$在点$(x_0,y_0)$处连续，则函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微 (188)

克莱罗定理

在某些条件下，求偏导数的顺序并不重要。具体来说，如果一个函数具有连续的二阶偏导数，则其混合偏导数相等。

$$\begin{gathered}\text{如果}f\text{在}(a,b)\text{处具有连续的二阶偏导数,那么:}\\ \frac{\partial f^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f^2}{\partial y\partial x}\\ \text{即}f''12=f''21\end{gathered} \tag{189}$$

隐函数求导

注意⚠️：

$$\text{由方程}F(x,y)\text{确定隐函数}y=f(x),\text{则}y'=-\frac{F'x}{F'y}$$

$$\begin{gathered}\text{设二元函数}z=(x,y),F(x,y,z)=0\text{是整体函数,那么隐函数}z\text{关于}x\text{的偏导数为:}\\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'x}{F'z}\quad\text{同理}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'y}{F'z}\\ \text{其中求}F'x\text{或}F'y\text{时不需要去管}z,\text{把}z\text{看做一个常数即可}\end{gathered} \tag{190}$$

$$\begin{gathered}\text{用两边同时对}x\text{求导的方法求偏导数时,此时}z\text{不可忽视}\\ \text{例如:}F(x,y,z)=x+y+z\quad\text{此时}F'x=1+z'_x\end{gathered}$$

多元函数的极值与最值

无约束极值

$$\text{二元函数}z=f(x,y)\text{在点}(x_0,y_0)\text{的某领域内有二阶连续偏导数,又}f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0, \tag{191}$$

$$\text{记}A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0), \tag{192}$$

$$\text{则有以下结论:} \tag{193}$$

$$(1)\text{若}AC-B^2>0,\text{则}(x_0,y_0)\text{为}f(x,y)\text{的极值点} \tag{194}$$

$$\quad\text{若}A<0,\text{则}(x_0,y_0)\text{为}f(x,y)\text{的极大值点} \tag{195}$$

$$\quad\text{若}A>0,\text{则}(x_0,y_0)\text{为}f(x,y)\text{的极小值点} \tag{196}$$

$$\tag{197}$$

$$(2)\text{若}AC-B^2<0,\text{则}(x_0,y_0)\text{不为}f(x,y)\text{的极值点} \tag{198}$$

$$\tag{199}$$

$$(3)\text{若}AC-B^2=0,\text{则}(x_0,y_0)\text{可能为}f(x,y)\text{的极值点,也可能不为}f(x,y)\text{的极值点} \tag{200}$$

$$\tag{201}$$

$$\text{可能取得的极值点就两种,驻点和偏导数不存在的点} \tag{202}$$

约束极值

$$\text{二元函数} z=f(x,y) \text{在条件} \varphi(x,y)=0 \text{条件下的极值点方法：} \tag{203}$$

$$\tag{204}$$

$$(1)\text{构造拉格朗日函数} F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \tag{205}$$

$$(2)\text{将} F(x,y,\lambda) \text{分别对} x,y,\lambda \text{求偏导数, 构造方程组} \tag{206}$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ \varphi_x(x,y)=0. \end{cases} \tag{207}$$

$$\tag{208}$$

$$\text{解出} x,y,\lambda, \text{其中} (x,y) \text{就是函数} f(x,y) \text{在条件} \varphi(x,y)=0 \text{下可能的极值点} \tag{209}$$

二重积分

$$\text{如果积分域} D \text{关于} y=x \text{对称, 那么} \iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)d\sigma \tag{210}$$

坐标系平移：有时二重积分是一个圆，但圆心并不在原点，此时可以换元进行坐标系平移。

(1)将二元方程转换为极坐标方程时,我们知道r的值但也不能直接带入. (211)

例如：$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+2y)d\sigma$,此时我们知道$r=1$,但是换元时$x=rcos\theta,y=rsin\theta$. (212)

(213)

(2)交换积分次序时顺序不能搞错 (214)

例如：$\int_{-1}^{0}dx\int_{x^2}^{1}xy\sqrt{1+y^3}dy$,交换积分次序后应该为$\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y}}^{0}xy\sqrt{1+y^3}dy$,而不是$\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{-\sqrt{y}}xy\sqrt{1+y^3}dy$ (215)

(216)

(3)参数方程注意对应区间关系。包括具体取值t与x的对应关系。 (217)

(218)

(4)去根号要加绝对值。 (219)

(220)

(5)渐近线正负无穷都要看。 (221)

(222)

(6)多元函数最值需要考虑边界情况。 (223)

(224)

(7)注意积分时上下限都要代入,不能飘。 (225)

(226)

(8)求解矩阵等价等一系列问题注意题目转换。例如求方程组通解!!! (227)

(228)

(9)不定积分ln注意带绝对值,包括去根号!!!注意一些题目条件限定,例如矩阵可逆行列式不为0 (229)

(230)

(10)有时带积分号不容易看出来，记得整体换元思想 (231)

(232)

(11)多元最值，有时条件极值约束的等式可以直接带换掉 (233)

(234)

(12)若A为$m*n$矩阵，B为$n*s$矩阵，若$AB=O$，则$r(A)+r(B)\leqslant n$. 注意n是什么东西!!! (235)

(236)

(13)二重积分转换极坐标注意不要遗漏r!!! (237)

(238)

(239)